1. Решити матричну једначину

$$XA - C = 3I + 2XC,$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. У зависности од реалног параметара a решити систем једначина

$$\begin{aligned} ax - 4y + z &= a \\ x - y + az &= 1 \\ x \phantom{{}-4y} - z &= 4. \end{aligned}$$

3. Од укупне количине робе на залихама $1/5$ је продата са зарадом од 12% за 2 800 000 динара. На $1/4$ је остварена зарада од 15%, а на остатку је остварена зарада од 30%. Израчунати укупну остварену зараду у процентима.

4. Пре 5 година (од данас) уложено је 1 000 000 динара, а пре годину дана (од данас) уложено је 600 000 динара. Колико треба уложити данас да би збир свих улога после 5 година (од данас) износио 4 000 000 динара? Каматна стопа је 8% (декурзивно), а капиталисање је квартално.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

1. Дата једначина еквивалентна је једначини

$$X(A-2C)=3I+C.$$

Ако узмемо да је

$$F=3I+C=\begin{bmatrix}3&-1&2\\0&5&1\\1&0&4\end{bmatrix}\quad \text{и}\quad E=A-2C=\begin{bmatrix}2&2&-2\\1&-1&-2\\-3&0&1\end{bmatrix},$$

онда је она еквивалентна једначини $XE=F$, односно добијамо да је

$$X=FE^{-1}.$$

Матрица кофактора за матрицу E је

$$\begin{bmatrix}-1&5&-3\\-2&-4&-6\\-6&2&-4\end{bmatrix}.$$

Такође, лако је видети да је $\det E=14$. Дакле,

$$E^{-1}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}-1&-2&-6\\5&-4&2\\-3&-6&-4\end{bmatrix},$$

па је

$$X=FE^{-1}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}3&-1&2\\0&5&1\\1&0&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&-2&-6\\5&-4&2\\-3&-6&-4\end{bmatrix}=$$
$$=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}-14&-14&-28\\22&-26&6\\-13&-26&-22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&-2\\11/7&-13/7&3/7\\-13/14&-13/7&-11/7\end{bmatrix}.$$

2. Приметимо да је

$$\Delta=\begin{vmatrix}a&-4&1\\1&-1&a\\1&0&-1\end{vmatrix}=-3(a+1),$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}a&-4&1\\1&-1&a\\4&0&-1\end{vmatrix}=-15a,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}a&a&1\\1&1&a\\1&4&-1\end{vmatrix}=3-3a^2=-3(a^2-1)=-3(a-1)(a+1),$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}a&-4&a\\1&-1&1\\1&0&4\end{vmatrix}=-3(a-4).$$

Како из $\Delta = 0$, следи да је $a = -1$, то имамо два случаја:

а) Ако је $a \neq -1$, решење система се добија применом Крамеровог правила, тј.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5a}{1+a}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = a - 1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{a-4}{a+1}.$$

б) Ако је $a = -1$, приметимо да је онда $\Delta = 0$, а, рецимо, $\Delta_x = 15 \neq 0$, па је систем несагласан.

3) Означимо укупну вредност робе са G. Тада имамо да је

$$\frac{1}{5} \cdot G \cdot 1{,}12 = 2800000 \quad \Longrightarrow \quad G = 12500000.$$

Дакле, остварена зарада на првом делу робе је

$$P_1 = 2800000 - \frac{1}{5} \cdot G = 2800000 - 2500000 = 300000.$$

Други део робе је продат са зарадом

$$P_2 = \frac{1}{4} \cdot G \cdot 0{,}15 = 468750.$$

Није тешко видети да је преостало 55% робе. Дакле, трећи део робе је продат са зарадом

$$P_3 = 0{,}55 \cdot G \cdot 0{,}30 = 0{,}55 \cdot 12500000 \cdot 0{,}30 = 2062500.$$

Укупна зарада изражена у динарима је

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 300000 + 468750 + 2062500 = 2831250,$$

тј. изражена у процентима је

$$p\% = \frac{2831250}{12500000} = 0{,}2265 = 22{,}65\%.$$

4) Тражени улог се добија решавањем једначине

$$1000000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}08}{4}\right)^{40} + 600000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}08}{4}\right)^{24} + x \cdot \left(1 + \frac{0{,}08}{4}\right)^{20} = 4000000,$$

тј.

$$1000000 \cdot 2{,}2080 + 600000 \cdot 1{,}6084 + x \cdot 1{,}4859 = 4000000.$$

Одавде је

$$x = \frac{826960}{1{,}4859} = 556538.$$